



TITLE:

# 半順序集合系におけるMobius関数 とグラフ (組合せ構造とグラフ理論 )

AUTHOR(S):

恵羅, 博

---

CITATION:

恵羅, 博. 半順序集合系におけるMobius関数とグラフ (組合せ構造とグラフ理論). 数理解析研究所講究録 1976, 259: 35-43

ISSUE DATE:

1976-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105798>

RIGHT:

## 半順序集合系における Möbius 関数とグラフ

東海大 恵羅 博

近年、平面上のグラフの Chromatic Polynomial を拡張して、その理論を発展させようとする試みが、いくつかなされている。

(文献[1]) グラフの Coloring 問題或は特徴付け等の問題に於いて、Chromatic Polynomial の理論がどの程度の重要性を持つかは、これからの問題である。ここでは、その一つのアプローチとして、G.C.Rota (文献[2]) によって指摘された、半順序集合上の Möbius 関数とグラフの Chromatic Polynomial との関連について述べる。

## I. 半順序集合系上の Möbius 関数

$P$  を任意の半順序集合とする。 $P$  の 2 元  $x, y$  に対して、 $P$  の部分集合  $\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$  を  $x, y$  を両端とする区間といい  $[x, y]$  で表やす。 $P$  の任意の区間  $[x, y]$  が有限集合となるとき、 $P$  を局所有限な半順序集合という。 $P$  に最大元、最小元が存在するとき、それぞれ  $I_P, O_P$  で表やすことにする。以後、 $P$  はすべて局所有限な半順序集合を表やすものとする。

$P \times P$ 上の実数値関数  $f$  で次の性質をもつものを考える。

$$x, y \in P, \quad x \not\leq y \text{ のとき}, \quad f(x, y) = 0$$

上のような関数  $f$  全体の集合を今、 $A(P)$  で表わすことにする。 $A(P)$  の任意の元  $f, g$  に対して、 $f$  と  $g$  の積  $f * g$  を次のように定める。

$$x, y \in P, \quad (f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y)$$

通常のと、スカラー倍の定義及び上の積  $*$  によって、 $A(P)$  は実数体  $R$  上の多元環をなす。この多元環  $A(P)$  を incidence algebra と呼ぶ。 $A(P)$  の単位元は Kronecker の delta  $\delta$  である。

すなわち,

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$$

特に, zeta function と呼ばれる次のような  $\zeta$  を考える。

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \leq y \text{ のとき}) \\ 0 & (x \not\leq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

$A(P)$  の任意の元  $f$  に対して,

$$(f * \zeta)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \zeta(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)$$

が成り立つ。

$P$  上の Möbius 関数  $\mu$  とは、 $A(P)$  の元で次の式により帰納的に定義されるものである。

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \delta(x, y)$$

上式の代わりに、 $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z, y) = \delta(x, y)$  によっても同値の定

義が得られる。定義から  $\zeta * \mu = \mu * \zeta = \delta$  となる。すなわち  $\mu$  は  $A(P)$  に於ける  $\zeta$  の逆元である。

$A(P)$  の 2 元  $f, g$  に対して  $g = f * \zeta$  が成り立っているとき、上に述べたことから、 $f = g * \mu$  となる。このことから、た

定理 1 (Möbius の反転公式)  $f$  を  $P$  上の実数値関数で、次の性質をもつものとする。「ある  $p \in P$  が存在して、 $x \neq p$  ならば  $f(x) = 0$ 」このとき、

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \text{ が成り立っているとするれば,}$$

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x)$$

2 つの局所有限な半順序集合  $P, Q$  の間の Möbius 関数の関係については、 $P, Q$  の間に Galois 対応と呼ばれる写像が存在するとき、応用上有用なつながりのあることが知られている。

$P$  から  $Q$  への写像  $p: P \rightarrow Q$  と  $Q$  から  $P$  への写像  $\pi: Q \rightarrow P$  が存在して、次の (i), (ii) の性質をもつとき、それらを  $P$  と  $Q$  の間の Galois 対応と呼ぶ。

$$(i) \quad p_1, p_2 \in P, \quad p_1 \geq p_2 \Rightarrow p(p_1) \leq p(p_2)$$

$$q_1, q_2 \in Q, \quad q_1 \geq q_2 \Rightarrow \pi(q_1) \leq \pi(q_2)$$

$$(ii) \quad \text{任意の } p \in P, q \in Q \text{ に対して } \pi p(p) \geq p, \quad p \pi(q) \leq q$$

定理 2  $P, Q$  を有限な半順序集合とし,  $P$  は最小元  $0_P$ ,  $Q$  は最小元  $0_Q$ , 最大元  $I_Q$  をもつとする。  $P, Q$  の間に Galois 対応

$\rho: P \rightarrow Q$ ,  $\pi: Q \rightarrow P$  で 「 $\pi(x) = 0_P \Leftrightarrow x = I_Q$ 」 を満たすものが存在するとき, 次の式が成り立つ。

$$\mu_Q(0_Q, I_Q) = \sum_{[a: \rho(a) = 0_Q]} \mu_P(0_P, a)$$

ただし  $\mu_P, \mu_Q$  はそれぞれ  $P$  及び  $Q$  上の Möbius 関数を表わす。

$L$  を有限束とする。  $L$  の部分集合  $R$  で次の条件を満たすものを考える。「 $I_L, 0_L \notin R$ ,  $x \neq I_L \Rightarrow y \geq x$  なる  $R$  の元  $y$  が存在する。」  $R$  の部分集合全体のつくる Bool 束を  $B(R)$  とする。今,  $L$  から  $B(R)$  への写像  $\pi: L \rightarrow B(R)$  を

$$\pi(x) = \{y \in R \mid y \geq x\}$$

と定義する。また  $B(R)$  から  $L$  への写像  $\rho: B(R) \rightarrow L$  を

$$\rho(A) = \bigwedge A, \quad \text{特に } \rho(\emptyset) = I_L \quad (\text{ただし, } \bigwedge A: A \text{ の下限})$$

と定義する。このとき,  $\pi, \rho$  は  $L$  と  $B(R)$  の間の Galois 対応をなす。この場合に定理 2 を適用すれば,  $L$  の Möbius 関数  $\mu_L$  は

$$\mu_L(0, I) = \sum_{[A \in R, \bigwedge A = 0_L]} \mu_{B(R)}(\emptyset, A)$$

集合  $S$  の元の数を  $n(S)$  で表わすことにすれば,

$$\mu_{B(R)}(\emptyset, A) = (-1)^{n(A)} \text{ であるから, 上式をかき直せば,}$$

$$\mu_L(0, I) = \sum_{[A \in R, \bigwedge A = 0_L]} (-1)^{n(A)}$$

以上のことから, 次の有限束の Möbius 関数についての定理を

得る。

定理 3  $L \supset R$  が上に述べた条件をみたすとき,  
 $R$  の部分集合  $A$  で,  $\wedge A = 0_L$ ,  $n(A) = k$  となるものの数を  
 $g_k$  で表わすことにすれば

$$\mu_L(0, I) = g_2 - g_3 + g_4 - \cdots + (-1)^{n(R)} g_{n(R)}$$

上の定理の中で,  $R$  に特別なものを考えることにより, 更に精密な結果を得る。まず, 有限束  $L$  の部分集合  $C$  で次の条件を満たすものを考える。

$$(i) \ 0_L, I_L \notin C \quad (ii) \ x, y \in C \Rightarrow x \neq y, x \neq y$$

$$(iii) \ 0_L \vee I_L \text{ の間の任意の極大な chain を } 0_L < x_1 < \cdots < x_r < I_L \text{ とす}$$

$$\text{れば, 必ずある } i \text{ に対して } x_i \in C \quad (1 \leq i \leq r)$$

このような  $C$  を  $L$  の cross-cut と呼ぶ。特に  $C$  として,

$$C = \{ x \in L \mid n([x, I_L]) = 2 \} \quad \text{とすれば, 定理 3 より}$$

$$\mu_L(0, I) = g_2 - g_3 + g_4 - \cdots + (-1)^{n(C)} g_{n(C)}$$

ただし  $g_k$  は  $C$  の部分集合  $S$  で  $\wedge S = 0$ ,  $\vee S = I$ ,  $n(S) = k$  となるものの数を表わす。

一般に, 勝手な cross-cut に対しても上式が成り立つことが知られている。

定理 4  $L$  を有限束,  $C \subset L$  を  $L$  の cross-cut,  $g_k$  を上に述べた数とすれば,  $\mu_L(0, I) = g_2 - g_3 + g_4 - \cdots + (-1)^{n(C)} g_{n(C)}$

## II グラフの Chromatic Polynomial

$G$  を loop 及び multi-edge を含まず, 方向付けされていないグラフとする。 $G$  の点の集合を  $V(G)$ , 線の集合を  $E(G)$  で表わす。

自然数  $n$  に対して, 写像  $f: V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  で次の性質を持つものを  $G$  の  $n$ -coloring という。「 $a$  と  $b$  とが  $G$  の隣り合う 2 点のとき,  $f(a) \neq f(b)$ 」

$G$  の  $n$ -coloring 全体の数を  $C(G, n)$  で表わすことにする。与えられた  $G$  に対して,  $C(G, n) \neq 0$  となる最小の  $n$  を求めることが興味のある問題となる。平面上の地図に関する 4 色問題は次のように述べることができる。「任意の極大平面グラフ  $G$  に関して,  $C(G, 4) > 0$  が成り立つか。」

$C(G, n)$  は  $n$  の多項式で表わされる。今,  $V(G)$  の長個の部分集合への直和分割  $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$  (注) で, 「 $\forall i, x, y \in V_i \Rightarrow x$  と  $y$  とは  $G$  の中で隣り合わない。」という性質をもつものを考える。 $m_r$  を上のような直和分割で  $k=r$  であるもの全体の数を表わすとすれば次の定理が成り立つ。

定理 5 
$$C(G, n) = \sum_{r=1}^n m_r n_{(r)}$$

ここに 
$$n_{(r)} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

次の定理も  $C(G, n)$  の定義より直ちにわかる。

定理 6  $G$  が連結成分  $G_1, G_2, \dots, G_{p_0}$  に分割されるとき,

$$C(G, n) = C(G_1, n) \cdot C(G_2, n) \cdots C(G_{p_0}, n)$$

$G$  の連結成分の数を  $p_0$ , 点の数を  $\alpha_0$  とすれば, 上の 2 つの定理より,  $C(G, n)$  は次数  $\alpha_0$  の monic な多項式で,  $n^{p_0}$  を因数にもつことがわかる。したがって,

$$C(G, n) = n^{p_0} P(G, n)$$

と表わすことができる。ここに  $P(G, n)$  は次数  $\alpha_0 - p_0$  の多項式である。 $C(G, n)$  を  $G$  の Chromatic Polynomial と呼ぶ。

上記の  $P(G, n)$  はグラフ的に次のような解釈ができる。

$G$  の  $n$ -coloring 全体の集合を  $A$  とする。 $G$  が連結成分  $G_1, G_2, \dots, G_{p_0}$  に分割されるとき,  $f, g \in A$  に対して,

$$\forall a \in G_i, \quad f(a) - g(a) = k_i, \quad k_i: \text{定数}$$

がすべての  $i$  に関して成り立つとき,  $f \sim g$  と定義すれば  $\sim$  は同値関係となる。 $P(G, n)$  は  $\sim$  によって決まる  $A$  の同値類の数を表わす。

### III グラフ上の束における Möbius 関数

$G$  の線集合  $E(G)$  の部分集合全体によってつくられる束を  $M$  で表わすことにする。 $M$  における用作用子を次のように定義



する。

$S \in M$ ,  $\bar{S} = \{e \in E(G) \mid e \text{ の } 2 \text{ つの端点は } S \text{ によってつくられる } G \text{ の部分グラフの同じ連結成分に含まれる。}\}$

$M$  の閉元全体からなる部分束を  $L(G)$  で表わす。  $L(G)$  の最大元, 最小元をそれぞれ  $I$ ,  $O$  で表わすことにする。

$L(G)$  においては次のような chain に関する条件が満たされる。

定理 7  $L(G)$  の全順序部分集合で, 長さが極大なものの長さはすべて等しい。

系  $L(G)$  の任意の区間  $[x, y]$  においても上記の chain に関する条件は満たされる。

$p \in L(G)$  に対して,  $[O, p]$  の極大 chain の長さを  $p$  の rank といひ  $r(p)$  で表わす。

$G$  の Chromatic Polynomial は  $L(G)$  において次のように Möbius 関数を係数とする多項式に展開することができる。

定理 8  $G$  の Chromatic Polynomial を  $C(G, n) = n^0 P(G, n)$  とすれば

$$P(G, n) = \sum_{S \in L(G)} \mu_{L(G)}(O, S) n^{h(G) - r(S) - 1}$$

ただし  $h(G)$  は  $L(G)$  の高さ, すなわち  $r(I) + 1$  を表わす。

$G$  の連結成分の数を  $k$ , 点の数を  $\alpha$ . とすれば

$\ell(G) = \alpha_0 - p_0 + 1$  なる関係式がある。したがって定理に代入すれば,

$$C(G, n) = \sum_{S \in L(G)} \mu_{L(G)}(0, S) n^{\alpha_0 - r(S)}$$

$\mu_{L(G)}$  に関して, 定理4を使って計算する方法は, 次のようになる。

グラフ  $G$  の平面上 dual なグラフを  $G^*$  で表わすことにする。

グラフ  $G$  の circuits の集合  $\{C_i\}$  が  $\cup C_i = G$  となるとき,

$\{C_i\}$  は spanning であるという。

極大平面グラフ  $G$  の Möbius 関数に関して, 次の結果が定理4より導かれる。

定理9  $G^*$  の spanning な circuits の集合で,  $k$  個の circuits からなるものの数を  $S_k$  で表わすとき,  $L(G)$  の Möbius 関数  $\mu$  は次の式で表わされる。

$$\mu(0, 1) = -S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n$$

ただし,  $G^*$  の spanning な circuits の集合のうちで, 元の数の最も多いものの元の数を  $n$  とする。

以上

### 参考文献

1. Norman Biggs, 1974. Cambridge Uni. Press "Algebraic Graph Theory"
2. G.C. Rota, 1964. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie Band 2 Heft 4  
"On the Foundation of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions"